解説

なぜ誘電率は複素数で表現されるのか？

Why is permittivity expressed as a complex number?

京都大学 生存圏研究所　三谷 友彦
〒611-0011 京都府宇治市五ヶ庄,
e-mail: mitani@rish.kyoto-u.ac.jp

1. はじめに

「誘電率を複素数で表現する」ということは、本稿の読者の多くはある程度知っているであろう。では、なぜ誘電率は複素数で表現されるのか？そもそも、材料定数の1つである誘電率に"虚数"が出てくるとはどういうことなのか？本稿では、電磁波（あるいは一般的な波）の表現を出発点とし、誘電率の複素数表現に至る過程について解説する。

2. 周波数って何？ −前振りとして−

周波数とは「電気振動などの現象が1秒間当たりに繰り返される回数（Wikipediaより）」である。これはほとんどの読者が理解していると思われるが、話はそれほど単純ではない。例えば、図1に示した3つの波について、波の始点から終点までを1秒間としたとき、各々の波の周波数はいくつだろうか？

図1 これらの波の周波数はいくつ？

最初の波であれば、「1秒間に2回振動しているから2Hzだ」と説明すれば誰しもが納得できる。ところが2番目の波だと、着眼点によって2回振動しているようにも12回振動しているようにもみえ、統一的な解釈が得られない。3番目の波にいたっては、振動数を数えることすら困難である。このように、一言で「波」といっても波には様々な形が存在し、また波の表現方法も人それぞれである。よって、混乱を避けるためには見解の相違がないように波の形を定義する必要がある。電磁波工学を含む物理学の分野では、三角関数を用いて波を表現することを決まりとしている。

3. 三角関数と複素数

3-1. 波と三角関数の関係

三角関数とは$\sin\alpha$や$\cos\alpha$などと表記される関数の一種であり、直角三角形の斜辺の長さを1としたときのもう二つの辺の長さを表す。角度αを囲むように斜辺と接続する辺の長さが$\cos\alpha$、もう一方の辺が$\sin\alpha$である。なぜ三角関数と波が関係するのかというと、直角三角形の斜辺を円の半径に見立ててクルっと円を描くと、角度αに対する円周の軌跡の投影が波のように見えるからである。図2に平面座標上の円と三角関数の関係を図示する。

図2の左側に示すように、半径1の円の中心を原点として右端（白点）の始点から一回転の円を描くと、直角三角形の関係性から図中の角度αに対する(x, y)座標が$(\cos\alpha, \sin\alpha)$ となる。このとき、$\alpha = 2\pi ft$（πは

円周率）として時間tに対してαを変化させると、tに対するy座標の軌跡は図2の右側のように波の形になる。このときのfが周波数である。このようにして、波は三角関数を用いて定義することができ、周波数を用いれば波の振動数が定義できる。

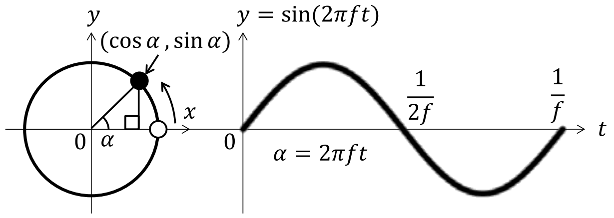

図2　円と三角関数の関係

三角関数には周波数の他に、振幅と位相が定義できる。振幅とは波の大きさのことであり、sin や cos の前に定数Aを掛ければよい。位相とは、時刻$t = 0$において三角関数の始点が図2の円周上のどの位置に来るかを表す値であり、図2に示す角度αに対応させることができる。図2では始点の角度を$\alpha = 0$としているが、αは0(0°)から2π(360°)までの値を取り得る（実際は、αは0°より小さい値や360°より大きい値も取り得るが、円周上の回転数が増えたり、回転方向が変わったりするだけで結局は0°から360°までのどこかの値と実質同じになる）。振幅A、周波数f、位相αを用いると、一般的な三角関数は$A\sin(2\pi ft + \alpha)$と表すことができ、この三角関数を用いれば様々な波を統一的に表現することができる。

3-2. 三角関数と複素数の関係

図2の円は横軸をx、縦軸をyとした平面座標であるが、横軸を実軸、縦軸を虚軸とした複素平面座標で表したとしても、$(\cos\alpha, \sin\alpha)$が$(\cos\alpha, \mathrm{j}\sin\alpha)$となるだけで本質は変わらない。jは虚数単位であり、$\mathrm{j} = \sqrt{-1}$である。このとき、以下の便利な数学公式（オイラーの公式）によって三角関数と複素数を結びつけることができる。

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha \qquad (1)$$

eは自然対数の底である。式(1)は「自然対数の純虚数乗が三角関数になる」という何とも不思議な公式であるが、この公式のおかげで複素数と三角関数が結びつく。さらに、3-1節で述べたように三角関数で表現できるから、$\alpha = 2\pi ft$とすれば$\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ft}$もやはり波の表現として扱うことができる。なお、多くの参考書では角周波数$\omega = 2\pi f$を用い、波を$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$で表現する。この方が、いちいち2πが出てこないので簡便である。

波を複素数で表現する大きな理由の一つとして、以下の式(2)のように微積分が極めて楽になることが挙げられる（積分の積分定数は省略する）。

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})}{\mathrm{dt}} = \mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \ , \quad \int \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{dt} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{\mathrm{j}\omega} \qquad (2)$$

三角関数の微積分だと「sin が cos になって...」と面倒であるが、指数関数と複素数で表現された関数の微積分は直感的にも扱いやすい。

以上より、物理学の分野では波を「指数関数と複素数」で表すこととし、波にまつわる様々な物理現象を表現している。これに基づき、電磁波の電界、磁界（あるいは交流の電圧、電流）も指数関数と複素数で表現している。

4. なぜ誘電率が複素数で表現されるのか？

4-1. 誘電率

ある材料に電界を印加すると、材料には分極が発生する。この分極が印加電界と線形関係（比例関係）にあるとき、材料の誘電率εは次式で表される。

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} \qquad (3)$$

ここで$\boldsymbol{E}$は材料に印加される電界（単位：V/m）であり、$\boldsymbol{D}$は材料内に発生する電束密度（単位：C/m²）である。$\boldsymbol{D}$も$\boldsymbol{E}$もベクトルであり、大きさと方向をもつ。電束密度$\boldsymbol{D}$は電荷の存在によって生じるベクトル場を表しており、$\boldsymbol{D}$の大きさは材料内に誘導される電荷量と関係がある。つまり式(3)によれば、誘電率は外部からの印加電界によって材料内に誘導される電荷量の度合いを表すこととなる。

ここで、電界ベクトルがどの方向を向いたとしても、材料に発生する電束密度ベクトルの方向が電界ベクトル方向と一致し、電界ベクトルと電束密度ベクトルの大きさの比がベクトルの方向に依らず一定となるとき、この材料を等方性媒質と呼ぶ。等方性媒質の場合、誘電率εの大きさのみを考えれば良い。

真空の場合、真空には分極が発生しない。このときの誘電率を真空の誘電率ε_0とすると、材料の誘電率εは

真空の誘電率との比を用いて

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}} \tag{4}$$

と表すことができる。このε_{r}を比誘電率と呼ぶ。ε_0は$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$F/m と非常に小さい値のため、材料の誘電率の指標としてはεよりもε_{r}を用いる方が理解しやすい。

4-2. 電磁波照射時の誘電率

等方性媒質の材料に対して、角周波数ωをもつ電磁波を照射することを考える。ここでは誘電率のみに焦点を当てるため電磁波の電界のみを考慮し、等方性媒質を想定しているため電界ベクトルの方向の議論は省略する。以上より、電界Eの大きさを$|E|$とすると、電界は$E = |E|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$と表すことができる。$|E|$は振幅に相当し、電界の位相は 0 としている。

いま、材料が真空である場合には、真空には分極が発生しないため、電界印加と同時に電束密度が発生する。つまり電束密度Dは$D = \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 |E|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$となる。ところが、分極が発生する一般的な材料では、電界印加と同時には電束密度は発生せず、僅かながら時間が遅れて発生する。この時間遅れをτで表すと、元々の印加電界の波を表す$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$の$t$が電束密度発生時には$\tau$だけ遅れるため、$t$を$(t-\tau)$で表すこととなる。よって電束密度の大きさを$|D|$とすると、電界$E = |E|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$が印加された一般的な材料の電束密度は$D = |D|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-\tau)}$となる。以上より、誘電率$\varepsilon$は式(3)を用いて

$$\varepsilon = \frac{D}{E} = \frac{|D|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-\tau)}}{|E|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}} = \frac{|D|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{|E|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}} = \frac{|D|}{|E|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau} \tag{5}$$

と表すことができる。さらに、式(1)を式(5)に代入すると、誘電率は最終的に

$$\varepsilon = \frac{|D|}{|E|}\cos\omega\tau - \mathrm{j}\frac{|D|}{|E|}\sin\omega\tau \tag{6}$$

と表現される。

式(6)の右辺をよく見てほしい。複素数である。ここまでの議論において、誘電率そのものには特段の配慮をしていないにも関わらず、「印加電界と発生電束密度の間には時間差がある」という条件を加えただけで誘電率が複素数になるのである。これは紛れもなく、電磁波を指数関数と複素数で表現したことに起因する。

以上より、「誘電率がなぜ複素数で表現されるのか？」が明らかとなった。誘電率そのものが複素数うんぬんではなく、「電磁波という波を指数関数と複素数で表現したがために『誘電率を複素数で表現せざるを得なくなった』」のである。

なお、真空の場合には時間遅れτが存在しないため、式(6)に$\tau = 0$を代入すれば$\varepsilon_0 = |D|/|E|$となり、真空の誘電率は実数（虚部は 0）となる。

4-3. 複素誘電率と誘電正接

誘電率を複素数で表現せざるを得なくなったので、誘電率を改めて

$$\varepsilon = \varepsilon' - \mathrm{j}\varepsilon'' \tag{7}$$

と表し、εを改めて複素誘電率と呼ぶことにする。ε'が複素誘電率の実部、ε''が複素誘電率の虚部である。

複素誘電率の実部と虚部の比を考えると、式(6)と式(7)の対応関係より

$$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \left(\frac{|D|}{|E|}\sin\omega\tau\right) \Big/ \left(\frac{|D|}{|E|}\cos\omega\tau\right) = \frac{\sin\omega\tau}{\cos\omega\tau} = \tan\omega\tau \tag{8}$$

となる。ここで$\omega\tau = \delta$とおけば、

$$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \tan\delta \tag{9}$$

となり、読者の多くも既知であろう誘電正接の式が得られる。また、式(9)を複素平面上で図示すれば図 3 のようになり、ε'とε''と角度δの関係性が三角関数の起源である直角三角形の関係にぴったりと収まる。δは三角関数上では位相に対応するため、δは印加電界と発生電束密度の位相差を表していることにもなる。

また、式(6)において複素誘電率が周波数の関数として示されているのは興味深い。もちろん、複素誘電率と周波数の関係は本稿で述べたような単純なものではないが、誘電率は一定の値ではなく周波数（あるいは温度）の関数であることを知っておくことは、照射効率の良いマイクロ波加熱装置を設計する上で重要である。

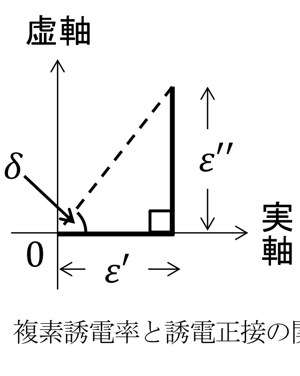

図 3 複素誘電率と誘電正接の関係

5. おわりに

本稿では、「誘電率がなぜ複素数で表現されるのか？」を明らかにするために、「そもそも電磁波という波をどう表現するのか？」について紐解き、複素誘電率が現われる理由について述べた。透磁率の場合でも、誘電率と透磁率、印加電界と印加磁界、電束密度と磁束密度の双対性から、同様の議論によって複素透磁率を述べることができる。本稿を通じて、誘電率や透磁率がなぜ複素数で表現されるのか、電磁波がどのように表現されるのかについての理解がなされることにより、マイクロ波加熱の理論に対する理解も進むことを期待する。

なお、本稿の議論を補足となる参考文献を末尾に記す。電磁波工学の観点からみたマイクロ波加熱の捉え方として参考にされたい。

参考文献

柴田長吉郎、工業用マイクロ波応用技術、電気書院、1986.

三谷友彦、-はじめて学ぶ電磁波工学と実践設計法- マイクロ波加熱応用の基礎・設計、科学情報出版、2015.